TD 16 : Convexité Corrigé

Exercices théoriques sur la convexité

1 ★★☆ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes.

1) Montrer que $f+g$ est convexe.
2) Montrer que si g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe.
3) Dans le cas général, peut-on affirmer que $g \circ f$ est convexe ?

2 ★★★☆ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1) On suppose f dérivable. Montrer que si f admet un minimum local en a, alors ce minimum est global.
2) Même question sans l'hypothèse "f dérivable".
3) Que peut-on dire si f admet un maximum local en a ?

(q. 2 uniquement) Supposons par l'absurde que a n'est pas un minimum global pour f. Il existe donc un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < f(a)$. Dans un premier temps, on suppose que $x_0 < a$. Comme f admet en a un minimum local, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \left[a-\eta, a+\eta\right]$, on a $f(x) \geq f(a)$. On pose alors $x_1 = a - \eta$. En particulier, on ne peut avoir $x_0 \in \left[a-\eta, a\right[$ car $f(x_0) < f(a)$. D'où $x_0 < x_1$. On a donc

$$x_0 < x_1 < a \quad \text{et} \quad f(x_0) < f(a) \leq f(x_1)$$

Or, comme f est convexe, par l'inégalité des pentes, on a

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1}$$

Or, $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} > 0$ et $\dfrac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1} \leq 0$. Contradiction. On montrerait de même que l'hypothèse $x_0 > a$ conduit à une contradiction. D'où f admet un minimum global en a.

3 ★★★☆ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Montrer que f est constante.

Inégalités de convexité

4 ★★☆ En utilisant un argument de convexité, montrer les assertions suivantes :

$$\forall x > 0 \qquad \ln(x) \leq x - 1$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

5 ★★☆ Montrer que $x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur $\left]1, +\infty\right[$. En déduire :

$$\forall a, b > 1 \qquad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$$

6 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(x_1 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

7 ★★★☆ Soit $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1) La fonction f est-elle convexe ou concave ?
2) En déduire que pour tous $x_1, \cdots, x_n > 0$, on a :
$$1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)}$$
3) En déduire que pour tous $x_1, \cdots, x_n > 0$ et $y_1, \cdots, y_n > 0$, on a :
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(x_k+y_k)}$$

8 ★★★ Soit $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1) Montrer que pour tous $a, b > 0$, on a :
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$
2) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n > 0$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}$$